إحصاء واحتمال (نظري)

المحاضرة النظرية الثامنة والأخيرة

* لتقدير متوسط المجتمع الطبيعي μ:
حتى يتم التقدير مجالياً نحتاج إلى ما يسمى بتوزيع ستودنت $t(n)$
وهو بالشكل

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{n^2}{2}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

وهو من لوازم التقدير المجالي
لا يلزم حفظ قانونه.

* مبرهنة النهاية المركزية: هي محور عمل التقدير المجالي

$$X \overset{\text{يخضع}}{\sim} N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

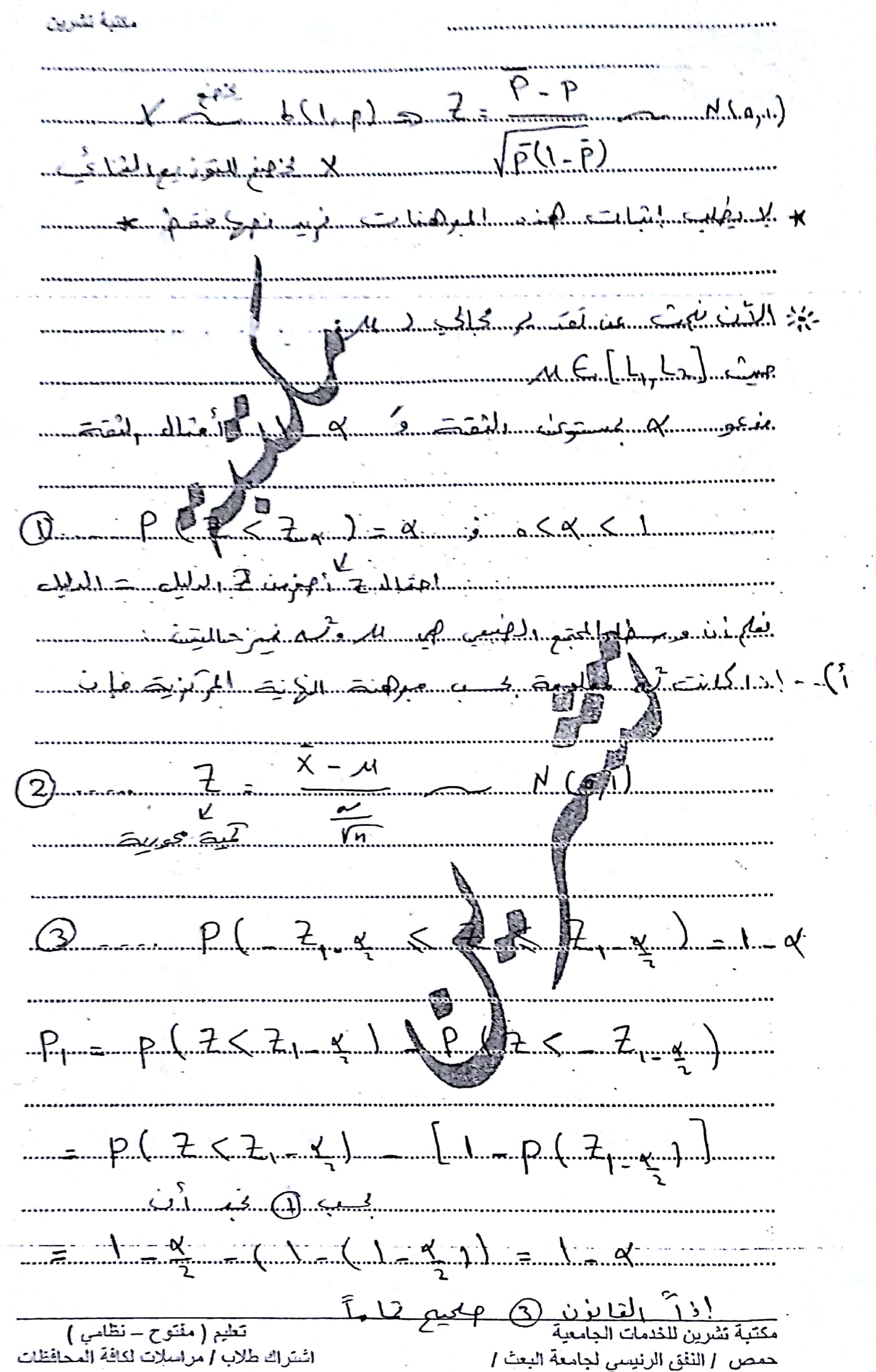
التوزيع الطبيعي — يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري

$$X \overset{\text{يخضع}}{\sim} N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n)$$

توزيع ستودنت

حيث σ: الانحراف المعياري للمجتمع وهي ليست دائماً معلومة
S: الانحراف المعياري للعينة العشوائية وهي دائماً معلومة



$X \sim b(1,p) \Rightarrow Z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}} \sim N(0,1)$ (تقريباً)

X تخضع للتوزيع الثنائي

* لا يطلب إثبات هذه المبرهنات فهي نظرية مهمة *

※ الآن نبحث عن تقدير مجالي لـ μ

حيث $\mu \in [L_1, L_2]$

ندعو α بمستوى الثقة و $\alpha-1$ أمثال الثقة

(1) ..... $P(Z < Z_\alpha) = \alpha$; $0 < \alpha < 1$

احتمال أن Z أصغر من Z الدليل = الدليل

نعلم أن وسط المجتمع الطبيعي هي μ و σ^2 غير معلومة

أ) - إذا كانت σ^2 معلومة بحسب مبرهنة النهاية المركزية فإن

(2) ..... $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Z ← كمية محورية

(3) ..... $P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

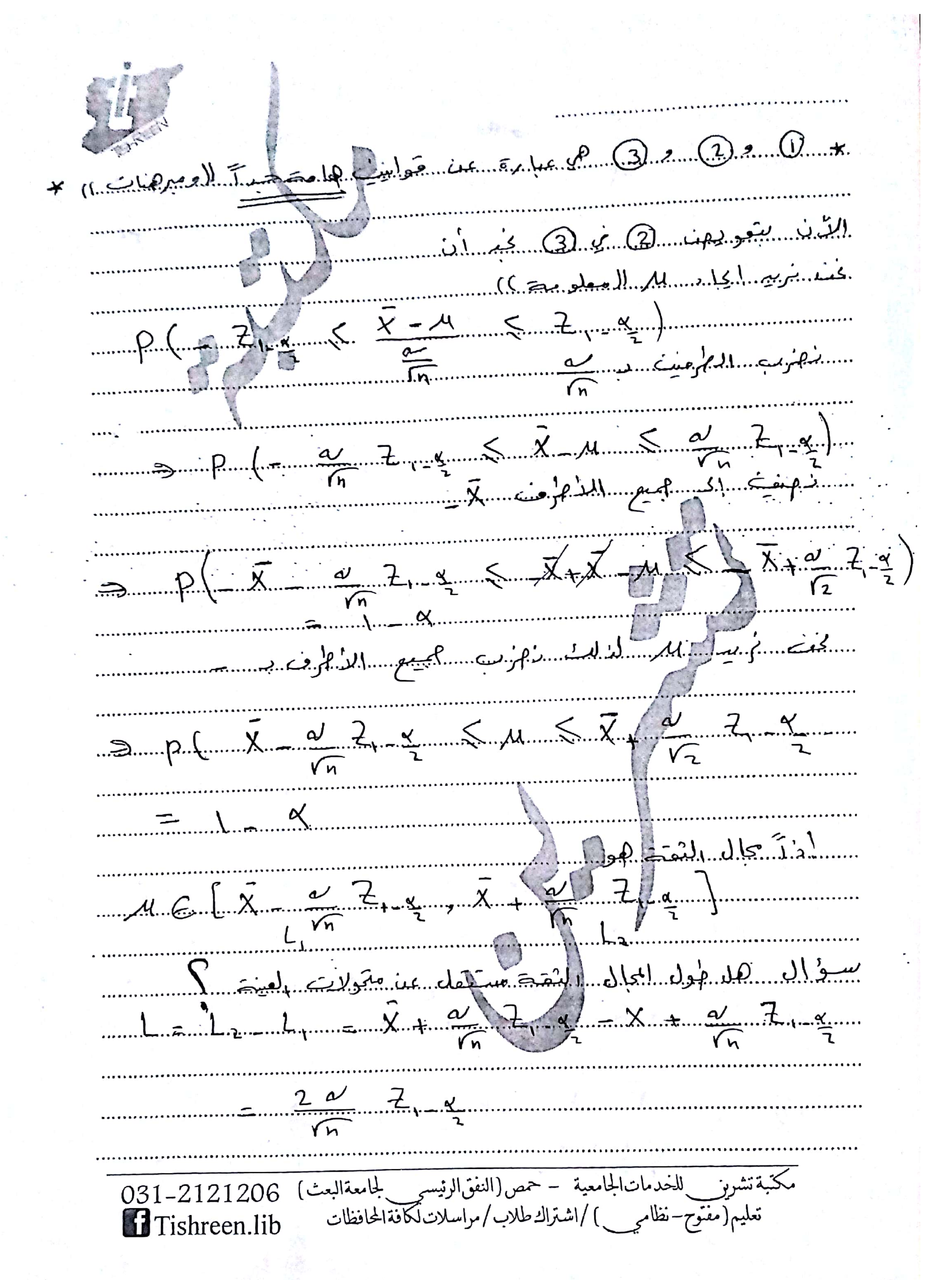
$P_1 = p(Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - p(Z < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$= p(Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - [1 - p(Z_{1-\frac{\alpha}{2}})]$

بحسب (1) نجد أن

$= 1 - \frac{\alpha}{2} - (1 - (1 - \frac{\alpha}{2})) = 1 - \alpha$

إذاً القانون (3) صحيح تماماً



* ① و ② و ③ هي عبارة عن قوانين هامة جداً للمبرهنات !! *

الآن بتعويض ② في ③ نجد أن

نحن نريد إيجاد μ المعلومة !!

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \bar{X}-\mu \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

نضيف إلى جميع الأطراف $-\bar{X}$

$$\Rightarrow P\left(-\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le -\bar{X}+\bar{X}-\mu \le -\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= 1-\alpha$$

نحن نريد μ لذلك نضرب جميع الأطراف بـ $-$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= 1-\alpha$$

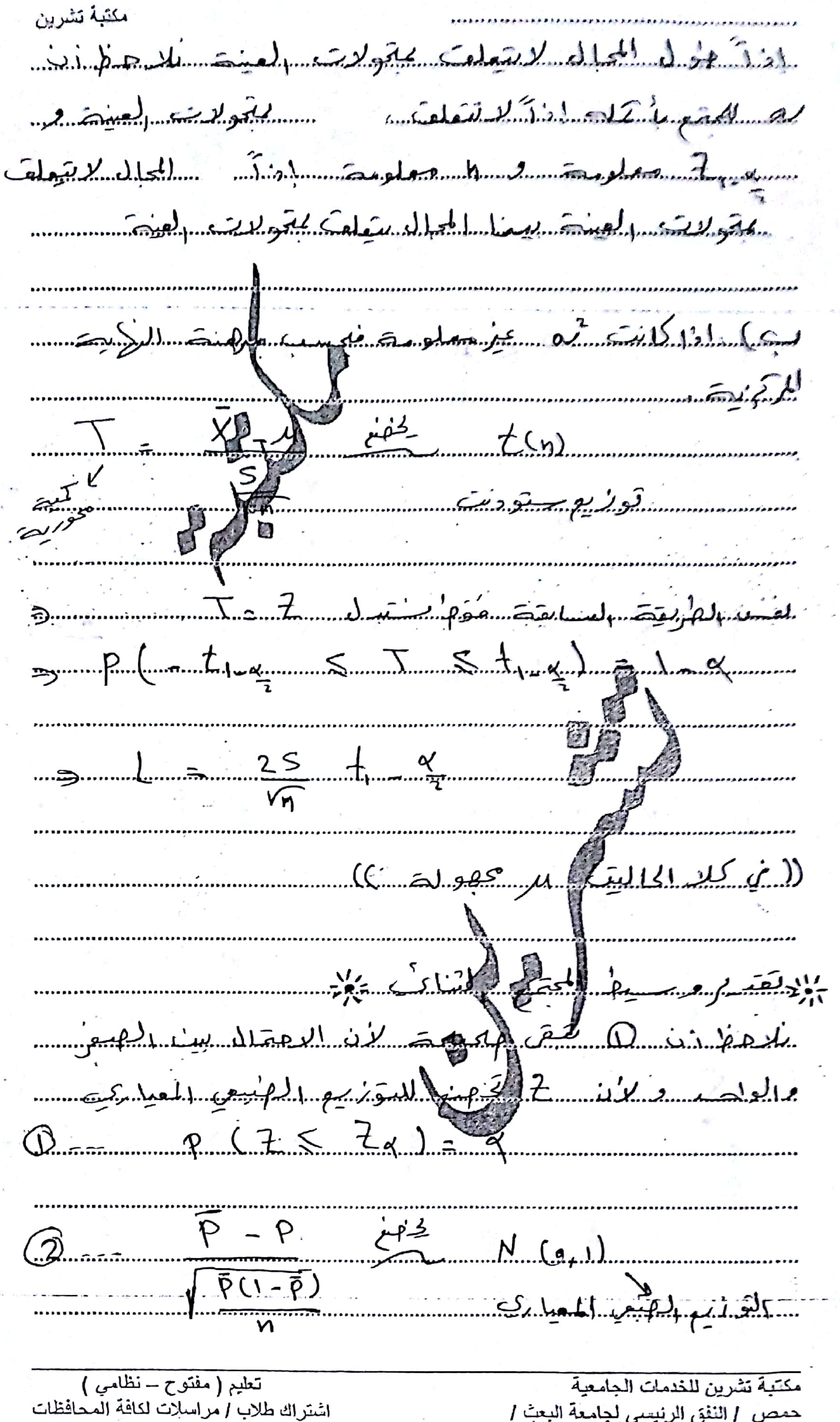
إذاً مجال الثقة هو

$$\mu \in \left[\underbrace{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{L_1}, \underbrace{\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{L_2}\right]$$

سؤال هل طول المجال الثقة مستقل عن متحولات العينة ؟

$$L = L_2 - L_1 = \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$



إذاً طول المجال لا يتعلق بمتحولات العينة نلاحظ أن

m المقدر يتعلق إذاً لا يتعلق ... بمتحولات العينة و

σ معلومة و n معلومة إذاً المجال لا يتعلق

بمتحولات العينة بينما المجال يتعلق بمتحولات العينة

ب) إذا كانت σ^2 غير معلومة فحسب المبرهنة النهاية المركزية

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{يخضع} \quad t(n)$$

كمية محورية

توزيع ستودنت

نفس الطريقة السابقة مع استبدال T بـ Z ⇒

$$\Rightarrow P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

((في كلا الحالتين μ مجهولة))

☀ تقدير وسيط المجتمع الثنائي ☀

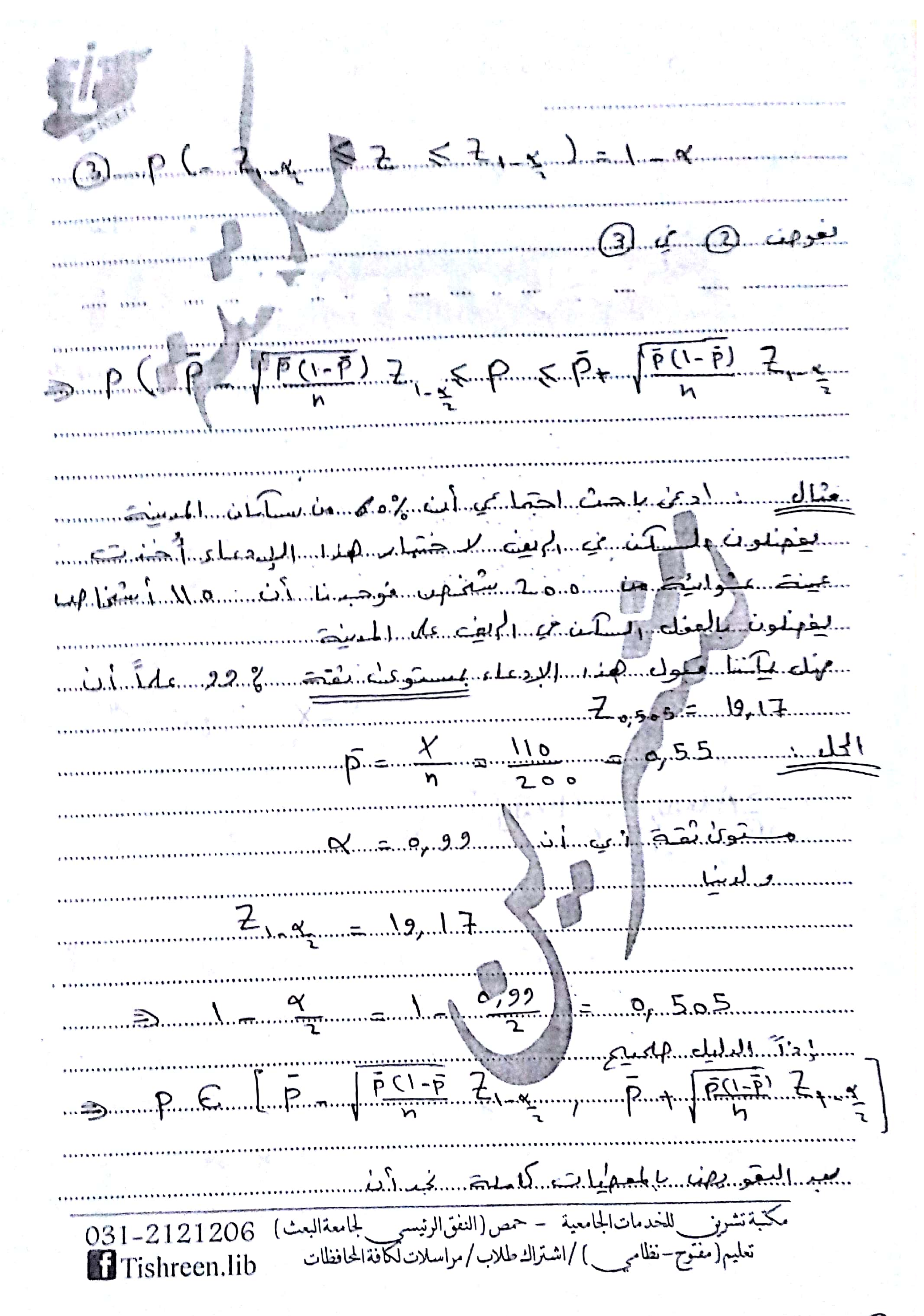
نلاحظ أن ① تقريبية لأن الانتقال بين المجتمع

الواحد و لأن Z تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري

① $P(Z \leq Z_\alpha) = \alpha$

② $\frac{\bar{P} - P}{\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}}$ يخضع $N(0,1)$

التوزيع الطبيعي المعياري



③ $P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

نعوض ② في ③

$$\Rightarrow P\left(\bar{p} - \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\, Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq p \leq \bar{p} + \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

مثال: ادعى باحث اجتماعي أن 50% من سكان المدينة يفضلون السكن في الريف لاختبار هذا الإدعاء أخذت عينة عشوائية من 200 شخص فوجدنا أن 110 أشخاص يفضلون بالفعل السكن في الريف على المدينة
هل يمكننا قبول هذا الإدعاء بمستوى ثقة 22% علماً أن

$Z_{0,505} = 19,17$

الحل:

$$\bar{p} = \frac{x}{n} = \frac{110}{200} = 0,55$$

مستوى ثقة أي أن $\alpha = 0,99$

ولدينا

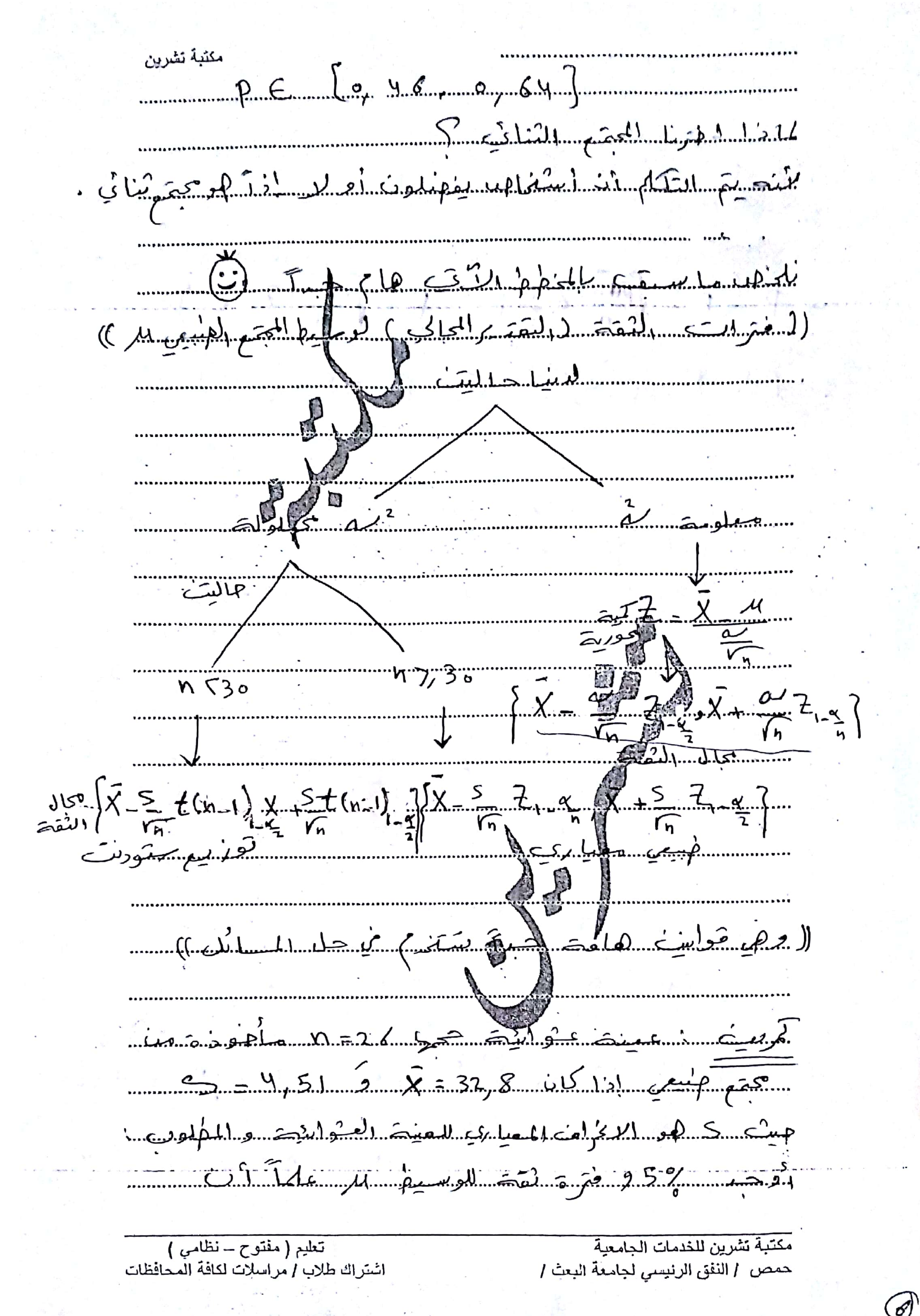
$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 19,17$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,99}{2} = 0,505$$

نوجد الدليل الصحيح

$$\Rightarrow p \in \left[\bar{p} - \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\, Z_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{p} + \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

بعد التعويض بالمعطيات كاملة نجد أنه



$P \in [0.46 , 0.64]$

ماذا لو اخترنا المجتمع الثنائي ؟

بحيث يتم التكلم أن أشخاص يفضلون أم لا إذاً هو مجتمع ثنائي .

ملاحظة مستقبلية بالمخطط الآتي هام جداً ☺

((فترات الثقة (التقدير المجالي) لوسيط المجتمع الطبيعي μ))

لدينا حالتين

- σ^2 مجهولة ← حالتين:
  - $n < 30$ ← مجال الثقة $\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t(n-1)_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t(n-1)_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$ توزيع ستودنت
  - $n \geq 30$ ← $\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$ طبيعي معياري
- σ^2 معلومة ← كمية محورية $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ← $\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$ مجال الثقة

((وهي قوانين هامة جداً تستخدم في حل المسائل))

تمرين: عينة عشوائية حجمها $n = 26$ مأخوذة من مجتمع طبيعي إذا كان $\bar{X} = 32.8$ و $S = 4.51$

حيث S هو الانحراف المعياري للعينة العشوائية والمطلوب:

أوجد فترة ثقة 95% للوسيط μ علماً أن

$t, Z_{0,975} = 2,06$

الحل :

ملاحظة هامة : لقد أعطانا t و Z لكن يجب أن نختار بين t و Z بالحجم إن $n=26$ وهي أصغر من 30 لذا نختار t في حال كانت $n>30$ نختار Z

σ مجهولة و $\Rightarrow t_{0,975} = 2,06$

وعندما قال فترة ثقة إذاً

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$$

نعوض بالقانون مباشرة

فترة الثقة لـ μ

$$\left\{ \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t(n-1)_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t(n-1)_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

($n-1$ ← الوسيط)

$$\left\{ 32,8 - \left(\frac{4,51}{5}\right)(2,06) , 32,8 + \left(\frac{4,51}{5}\right)(2,06) \right\}$$

$$\left\{ 32,8 - (0,902)(2,06) , 32,8 + (0,902)(2,06) \right\}$$

$$\left\{ 32,8 - 1,85 , 32,8 + 1,85 \right\}$$

$$[30,95 , 34,65]$$

وهو المطلوب

تمرين: إذا كان معدل الرواتب لموظفي إحدى الشركات الخاصة والبالغ عددهم 1080 شخص هو 1200 دولار بانحراف معياري قدره 80 دولار والمطلوب:

1 - عين مجال الرواتب الذي يحوي داخله على الأقل 810 من الموظفين

الحل:

$\bar{X} = 1200 \quad n = 1080$

$S = 80$

نستخدم مبرهنة تشبيشيف

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)(1080) = 810$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{810}{1080} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{81}{108}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{27}{108} \Rightarrow k^2 = \frac{108}{27} = 4 \Rightarrow k = 2$$

مجال الرواتب الذي يقع داخله على الأقل 810 شخص هو

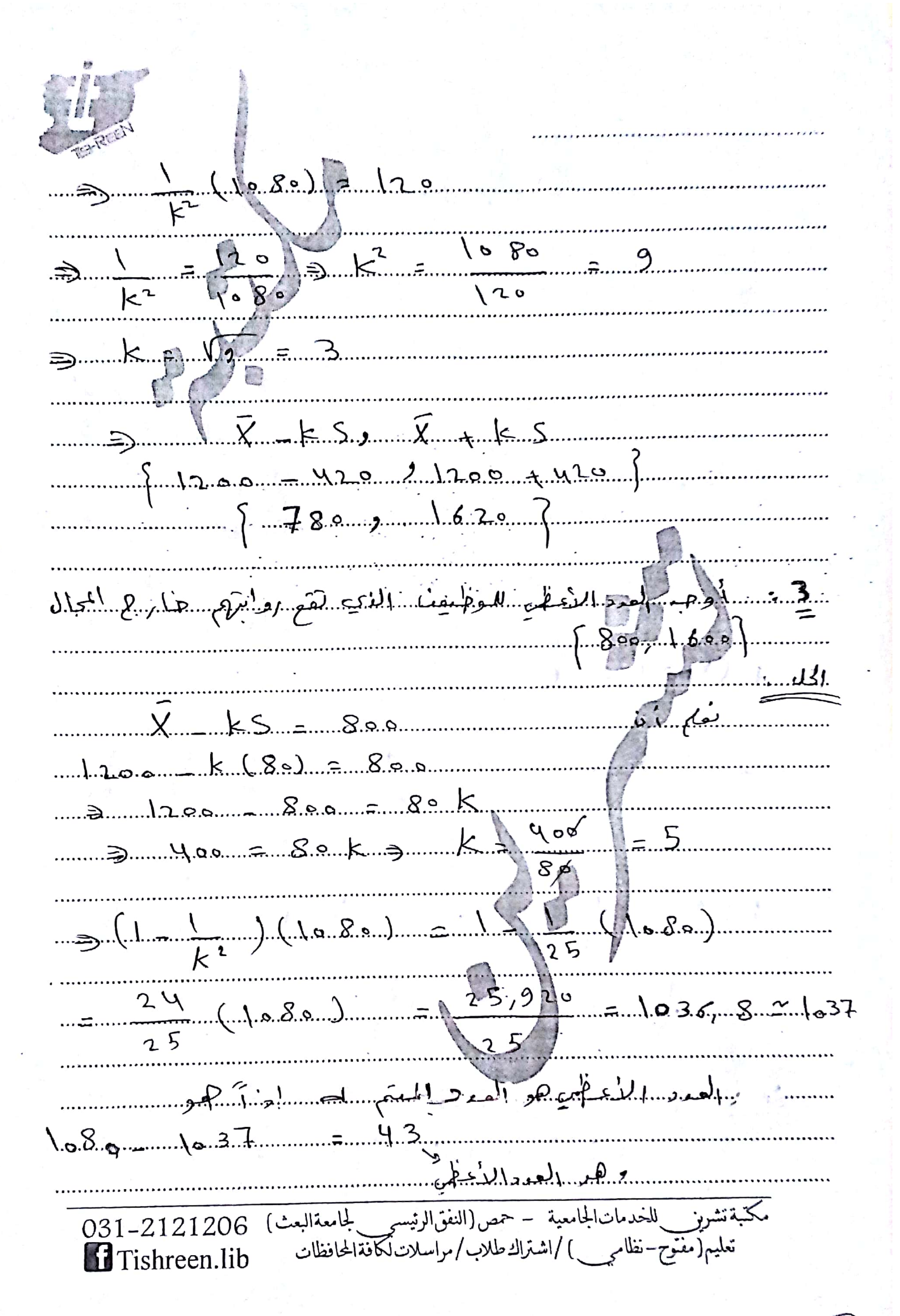
$$[\bar{X} - kS , \bar{X} + kS]$$

$$[1200 - 160 , 1200 + 160]$$

$$[1040 , 1360]$$

2 - عين مجال الرواتب الذي يحوي خارجه على الأكثر 120 شخص

في هذه الحالة نأخذ $\frac{1}{k^2}$ لأنه خارج المجال



$\Rightarrow \frac{1}{k^2}(1080) = 120$

$\Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{120}{1080} \Rightarrow k^2 = \frac{1080}{120} = 9$

$\Rightarrow k = \sqrt{9} = 3$

$\Rightarrow \bar{X} - kS , \bar{X} + kS$

$\{1200 - 420 , 1200 + 420\}$

$\{780 , 1620\}$

3: أوجد العدد الأعظمي للموظفين الذي تقع رواتبهم خارج المجال $\{800 , 1600\}$

الحل:

نعلم أن

$\bar{X} - kS = 800$

$1200 - k(80) = 800$

$\Rightarrow 1200 - 800 = 80k$

$\Rightarrow 400 = 80k \Rightarrow k = \frac{400}{80} = 5$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)(1080) = \left(1 - \frac{1}{25}\right)(1080)$

$= \frac{24}{25}(1080) = \frac{25,920}{25} = 1036,8 \simeq 1037$

العدد الأعظمي هو العدد المتمم له إذاً هو

$1080 - 1037 = 43$ → وهو العدد الأعظمي

4 - أوجد العدد الأصغري للوظيفة الذي تقع رواتبهم في المجال [880 , 1525] وظيفة

تمرين: يحتوي كتاب على 232 صفحة و 232 خطأ مطبعياً احسب احتمال أن صفحة ما

1 - بها خطأين

2 - بها أقل من خطأين

3 - احسب احتمال أن يكون في صفحة ما خطأين على الأكثر

الحل:

لدينا $n = 232$ ولدينا احتمالين (خطأ أو لا)

إذاً نستخدم التوزيع البواسوني

(1) $\lambda = \frac{232}{232} = 1$

$\Rightarrow P(X=2) = e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2!} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}$

(2) $P(X=0) + P(X=1) = e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} + e^{-1} \frac{1^1}{1!}$

لأنه أقل من خطأين

$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$

(3) خطأين على الأكثر

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$\frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} = \frac{2}{e} + \frac{1}{2e} = \frac{5}{2e}$

تمرين: ليكن لدينا X متحول عشوائي يدل على حوادث السير في مدينة حمص فإذا كان

X	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	C	$2C$	$3C$	$4C$	$\frac{3}{2}C$	$\frac{C}{2}$
$P(X \leq x)$	C	$3C$	$6C$	$10C$	$\frac{23}{2}C$	$12C$

المطلوب:

1) أوجد C

$$\sum_x F(x) = 1$$

$$\Rightarrow C + 2C + 3C + 4C + \frac{3}{2}C + \frac{C}{2} = 1$$

$$\Rightarrow C\left(1 + 2 + 3 + 4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow C(12) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{12}$$

2) أوجد $P(X < 3)$

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{12} + 2\left(\frac{1}{12}\right) + 3\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

3) احسب $P(0 < X < 2)$

$$P(0 < X < 2) = P(X=1) = 2\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}$$

4- $P(0 < X \leq 4)$

وبنفس الطريقة السابقة نجد أن:

$P(0 < X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$+ P(X=4) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{2}(\frac{1}{12})$

$= \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{24} = \frac{4+6+8+3}{24}$

$= \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

5- اكتب دالة التوزيع الموافقة، وظيفة

يجب أن يكون

$\sum_x F(x) = 1$

تعريف وظيفة

احسب $Cov(X, X)$ و $Cov(X, a)$ و

$Cov(X+Y, Z)$

تعريف وظيفة

احسب $Var(X+Y)$ و $Var(X-Y)$

في الحالتين عندما يكون X, Y مستقلين وعندما يكون

X, Y مرتبطين (غير مستقلين)

تعريف: إذا علمت أن دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين

لـ X,Y : $f(x,y) = x+y \; ; \; x,y \in [0,1]$

المطلوب :

1- تحقق أنه قانون احتمالي

2- أوجد التوقع والتشتت

3- احسب $cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$

الحل: (1) $\iint f(x,y)\, dx\, dy$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(f(x,y)\, dx \right) dy + \int_{y=0}^{1} \left(f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

باقي الطلبات وظيفة ☺

«انتهت المحاضرة الأخيرة»

«مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح»

«إعداد : طارق الشميني»